4

Phénoménologie et théorie des catégories (I)

Albino Attilio Lanciani

L'attitude des philosophes par rapport aux théories mathématiques constitue, à elle seule, un problème intéressant à tout le moins dans un sens presque sociologique : normalement cette attitude est d'emblée caractérisée par un respect pour une discipline difficile et, par la suite, par un comportement qui oscille entre le désintérêt total et la condescendance également totale aux dictées des disciplines en question. Nous ne discuterons pas pour ce qui en est de la première attitude, elle est tout à fait possible, même s'il est assez facile, mais également faux, de liquider ces sciences comme du *Gestell* symbolique. Nous sommes plus intéressé à la deuxième attitude et, à ce sujet, il faut bien remarquer que souvent la condescendance dont certains philosophes, ou même certaines écoles, font montre relève plus de l'idée qu'ils se sont faits des mathématiques que des mathématiques elles-mêmes [1]. Les manifestations de cette attitude sont les plus variées. On a des articles qui exhibent des formules mathématiques à chaque page en contrebutant, par ce biais, la rigueur présomptive de l'argumentation et on a aussi une utilisation des mathématiques, souvent abusive, empruntant des termes à ces sciences – qui à leur tour les avaient puisés dans le langage courant – pour les réappliquer dans le monde habituel. Mais est-ce que cela concerne, de près ou de loin, une réflexion authentiquement *philosophique sur les mathématiques* ?

Le minimum qu'on peut dire est que les résultats sont souvent assez farfelus. Une direction plus digne de la tradition philosophique, par opposition à tout un courant contemporaine, nous a déjà été indiquée G.-C. Rota,

1. Cela est probablement favorisé par le *cursus studiorum* lui-même, si l'on réfléchit aux conditions dans lesquelles les philosophes en formation rencontrent les mathématiques. Cette rencontre, si le jeune philosophe n'a pas une formation différente, passe par l'intermédiation de la logique (mathématique). Sans vouloir ajouter plus, le fait de passer par la logique mathématique pour comprendre les mathématiques est contesté de manière particulièrement virulente par les mathématiciens de profession.

lorsqu'il réfléchissait sur le sens de la rigueur en philosophie et en mathématiques :

> En philosophie, l'idéal de la précision trouve ses origines dans un concept de rigueur mal compris. Ne semble pas avoir traversé la tête de nos soi-disant philosophes, j'entends les philosophes philo-mathématiques, l'idée que la philosophie puisse être pourvue d'une rigueur spécifique, séparée de celle de la mathématique. Cette rigueur pourrait être, à son tour, décrite et codifiée, comme l'a été, à son temps, celle des mathématiciens. Mais, hypnotisé par le succès de la mathématique, le philosophe reste victime du préjugé que sa rigueur est l'unique rigueur possible, et que la philosophie ne peut faire autre chose que de l'imiter. [2]

C'est-à-dire que par paresse intellectuelle, faiblesse, manque de confiance dans son histoire – nous ne connaissons pas la ou les réponses et laissons le lecteur y réfléchir – souvent les philosophes abdiquent aux spécificités de leur discipline et importent *abusivement* – nous le répétons – la rigueur, *également présomptive au sens philosophique*, d'un autre milieu. C'est en ce sens que, probablement, l'explication d'une telle attitude concerne de plus près une sociologie des mœurs philosophiques que la philosophie en elle-même. La situation est particulièrement évidente dès qu'on touche à un problème qui est essentiel pour la réflexion philosophique du XX^e^ siècle : les problèmes des fondements. Dès qu'en mathématiques apparaît une nouvelle théorie jouant un rôle de fondation, les philosophes s'y jettent pour l'importer dans leur milieu. Cette attitude est en partie légitime : l'interprétation des constructions scientifiques concerne à plein titre l'activité philosophique, mais les problèmes commencent au moment où cette importation se transforme, par une sorte de jeu de prestige intellectuel, dans une fondation pour la philosophie elle-même. Cela s'est passé pour la théorie des ensembles et, du fait qu'il y a une théorie de fondation des mathématiques plus récente – la théorie des catégories –, on peut bien s'imaginer qu'on répétera la même erreur.

Dommage, car cette dernière théorie nous semble en ce sens particulièrement intéressante et elle donne plusieurs sujets de réflexion aux philosophes. Pour tenter d'éviter la plupart des fautes que plusieurs écoles ont accomplies dès qu'elles se rapprochent aux problèmes concernant les mathématiques, tâchons de définir un point d'entrée dans la question en espérant que par ce biais on puisse saisir les problèmes principaux au sens philosophique.

Les problèmes que cette théorie nous pose sont d'ailleurs multiples et nous pensons que ce qui demeure tout à fait préalable est une question d'ordre et de sens philosophique : comment poser les questions de manière qu'elles aient une pertinence philosophique ?

2. G.-C. Rota, « L'influence néfaste de la mathématique sur la philosophie », in *Phénoménologie discrète. Essais sur les mathématiques, la logique, le langage*, Mémoires des Annales de Phénoménologie, Beauvais, 2005 ; p. 40.

C'est pour cela que, conscients des risques qu'une telle attitude implique, nous voudrions ébaucher, dans cet article et dans le prochain, quelques réponses possibles aux questions suivantes :

1. Quel est le sens phénoménologique de la théorie des catégories, en admettant qu'il y en ait au moins un ?
2. Dans quelle direction et à quels buts la phénoménologie peut tenter d'utiliser la théorie des catégories pour éclairer quelques uns de ses problèmes ?
3. Est-ce que la théorie des catégories, une fois intégrée, du moins en partie, au tissu de la phénoménologie permettra de caractériser et/ou découvrir des nouveaux phénomènes jusqu'ici insoupçonnés ?

Avant de venir à ces ébauches de réponses, il nous semble important de répéter que l'ordre des questions demeure fondamental : l'option philosophique, la lecture philosophique d'une théorie mathématique est primitive. Rien n'empêche que, par la suite, au fur et à mesure que la connaissance de la théorie en question avance, il sera possible d'y revenir pour toute sorte d'ajustement, mais il doit être clair que si cette question renonçait à la primauté ce serait la théorie elle-même qui s'insérerait, subrepticement, et deviendrait elle-même une fondation philosophique. Nous croyons donc que par l'ordre qu'on attribue aux différentes questions, on se protégera – pour combien de temps c'est une autre question – des risques de rater, dès le début, la possibilité de trouver le bon point d'entrée.

1. LE SENS PHÉNOMÉNOLOGIQUE DE LA THÉORIE DES CATÉGORIES

D'un point de vue d'honnêteté philosophique, il nous semble que la première opération qu'il faut accomplir concerne la nécessité de voir, en bref, quels sont les points essentiels définissant les catégories. Pour cela, la chose la meilleure est d'interroger les mathématiciens eux-mêmes d'autant plus qu'ils montrent, et c'est une chose que les philosophes oublient souvent, une volonté de clarté qui ne peut qu'être appréciée dès qu'on tente d'explorer ce champ difficile. Pour ce faire, il nous semble, on est obligé d'accomplir une action qui, en quelque sorte, paraît se développer de manière rétrograde : il s'agit, en somme, de partir d'une théorie accomplie et après, par une sorte d'archéologie de la construction de la connaissance, remonter vers les idées, les suggestions et, pourquoi pas, les espoirs qui ont poussé à cette même théorie.

Avant d'y venir il vaut la peine d'articuler une considération ultérieure : cela faisant nous pourrons, du moins en ce qui concerne le projet, tenter de structurer en trois grandes filières le sens de notre interrogation :

1. *Le sens philosophique de la théorie telle qu'elle est.* Cette considération est pour nous l'introduction d'un clivage qu'il ne faut pas négliger : une chose est la théorie accomplie, avec ses résultats, ses théorèmes,

etc., autre chose est le « bouillonnement culturel » qui a porté à sa naissance.

2. *Le sens philosophique de ce qui a conduit à la naissance de la théorie elle-même*. En ce sens, on pourra accomplir un véritable effort de philosophie des mathématiques au sens où ces dernières peuvent, raisonnablement, nous apparaître comme un « produit culturel ». Tenter de voir la naissance d'une théorie mathématique redonne à la philosophie sa place conceptuelle appropriée.

3. La tentative de comprendre philosophiquement les actions, pour ainsi dire, de *feedback* que la théorie, une fois installée comme institution symbolique [3], peut accomplir en intégrant la compréhension des conditions qui ont conduit à la naissance de la théorie elle-même. Il s'agit de comprendre, par ce biais, qu'une théorie, une construction intellectuelle, une technique opératoire déterminent au sens déductif ce qui suivra dans l'évolution de la théorie elle-même, mais ces éléments exercent également une action en retour et se constituent, eux aussi, comme nouveaux objets dignes d'une interrogation philosophique appropriée. Cela veut dire que ces éléments seront intégrés au fleuve de l'expérience qui implique, incessamment, la modification et la réinterprétation des conditions de départ permettant de comprendre à nouveaux frais la théorie pour ce qu'elle « est », mais également pour ce qu'elle « veut être ».

Cette dernière tâche est indubitablement la plus difficile et elle est, en même temps, « indéfinie ». Cela au sens où ce processus est l'un des éléments pertinents pour exprimer, de manière toujours nouvelle, la construction du sens et la prolifération indéfinie de ses ramifications possibles. On y peut, tout au plus, indiquer des paliers, des moments de stase, mais jamais un palier qui l'accomplisse définitivement. Cela serait évidemment la fin de la création à l'intérieur de l'institution symbolique des mathématiques – on peut généraliser l'idée à toute autre institution symbolique –, et la transformerait dans une immense tautologie logique.

3. La notion d'« institution symbolique » est, pour nous, la traduction du terme husserlien de *Stiftung*. Nous y reviendrons, pour l'instant on peut la considérer comme presque synonyme du terme « culture ». En ce cas, l'institution symbolique des mathématiques est la culture mathématique, avec les objets qui la composent, l'exploration de son horizon interne et l'énumération des critères qui disent, à une certaine époque, ce qui est mathématique et ce qui ne l'est pas.

Pour cela nous nous permettons de renvoyer ou bien à notre *Analyse phénoménologique du concept de probabilité*, Hermann, Paris, 2012 ou bien à M. Richir, *L'expérience du penser. Phénoménologie, philosophie, mythologie*, Millon, Grenoble, 1998 ; p. 7 – 22.

2. LA THÉORIE DES CATÉGORIES TELLE QU'ELLE EST

Pour une étude élémentaire de la théorie des catégories – le niveau auquel nous nous situons dans tout ce travail –, on peut donner une présentation en utilisant un texte important : nous nous référons à *Categories for the working Mathematician* de S. Mac Lane [4].

Ce texte débute par une distinction entre méta-catégories et catégories proprement dites. Les premières sont décrites sur la base d'un certain groupe d'axiomes et se distinguent des catégories (sans le préfixe *méta-*) pour le fait qu'elles n'utilisent pas la théorie des ensembles. Il est déjà clair qu'on veut se situer en amont à cette dernière en dépassant, par là même, les ensembles comme plateforme conceptuelle censée fonder les mathématiques. La notion de départ est celle de méta-graphe caractérisé par trois éléments [5] :

1. Des objets a, b, c, ... sur lesquels, pour l'instant, nous n'en savons pas plus.
2. Des flèches f, g, h, ... sur lesquelles reviendra le poids mathématique principal de cette théorie.
3. Deux opérations qui s'appelleront l'une *domaine*, assignant à chaque flèche un objet $a = \text{dom } f$; et l'autre *codomaine*, assignant à chaque flèche un objet $b = \text{cod } f$.

Pour arriver à la notion de méta-catégorie il faut deux opérations ultérieures. A savoir, nous appellerons méta-catégorie un méta-graphe pourvu de l'identité – assignant à tout objet a une flèche $id_a = 1 : a \to a$ – et la composition – assignant à chaque couple de flèches $\langle g, f \rangle$ caractérisées par $\text{dom } g = \text{cod } f$, une flèche ultérieure $g \circ f$ qu'on nomme leur composition. Comme il est connu le dessin de cette opération la rend très intuitive et constitue la pierre de touche exhibée un peu partout dans toute présentation de la théorie des catégories :

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr, "g"] & \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & c \end{tikzcd}$$

Cette opération permet l'introduction de deux axiomes nouveaux dont le premier concerne l'*associativité* : pour les objets et les flèches dans la configuration :

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$$

4. S. Mac Lane, *Categories for the working Mathematician*, Springer-Verlag, New York – Heidelberg – Berlin,1971^3.

5. Nous suivons l'exposition de ce texte de manière complète. *Ibidem*, p. 5.