# 1

# Sur l'utilité des mathématiques pour la philosophie

Marco Rigoli — Albino Attilio Lanciani

Dans un article corrosif intitulé *L'influence néfaste des mathématiques sur la philosophie* [1], le mathématicien-philosophe Gian-Carlo Rota s'en prend au manque de courage des soi-disant « philosophes » qui se laissent influencer par une compréhension souvent extrêmement limitée des argumentations mathématiques pour en importer les manières de raisonner, ou plus modestement ce qu'ils en comprennent, afin de donner à la philosophie un semblant de rigueur. Le résultat est assez déconcertant, surtout pour ce qui concerne la cible principale de la polémique de G.-C. Rota : la philosophie analytique. L'approche des partisans de cette école est littéralement désintégrée et la condamnation de leur effort est sans appel :

> Comme des autruches qui se mettent la tête dans le sable, ils auront le même destin que ceux qui se refusent à apprendre les leçons du passé et à faire face à notre présent difficile. Leur destin consiste dans la futilité croissante, dûment suivie par l'extinction. [2]

Avec un tel résultat, il est évident que les philosophes doivent chercher de nouveaux chemins, de nouvelles suggestions pour déterminer quelque chose qui ressemble à un concept de rigueur utilisable en philosophie. Ils devront chercher, pour le moins, des moyens qui permettront à cette discipline millénaire de dire un mot aussi à notre époque. Une époque où, et tel est le noyau de la question, les sciences semblent atteindre le sommet de leur importance

1. G.-C. Rota, « L'influence néfaste des mathématiques sur la philosophie », in *Phénoménologie discrète. Ecrits sur les mathématiques, la science et le langage*, Mémoires des Annales de Phénoménologie, Beauvais, 2006 ; p. 35 – 47.

2. *Ibidem*, p. 47.

historique[3], en se multipliant dans une suite kaléidoscopique de possibilités expressives jusqu'à maintenant presque inconnues. D'autre part les mathématiques et la philosophie sont deux formes de savoir très anciennes, au fond la tradition grecque – philosophie, géométrie et musique – marque le début de ce qu'on considère la tradition culturelle occidentale. Précisément pour cela, même si G.-C. Rota semble nous suggérer que la tentative d'importer un critère de vérité ou de rigueur des mathématiques vers la philosophie est probablement vouée à l'échec, il vaut la peine de faire un effort pour sauver ce rapport dans l'espérance aussi qu'il arrive à nous éclairer quelques éléments aussi bien dans la philosophie que dans les mathématiques. Nous croyons que pour cela il y a plusieurs possibilités, mais, dans ce qui suit, nous voudrions en sonder seulement une. Il s'agit, du moins pour nous, d'une des possibilités plus productives suivant laquelle la philosophie peut utiliser les suggestions lui provenant des mathématiques en vue d'éclairer quelques-uns de ses thèmes fondamentaux. Mais il faut éviter les pièges qui nous ont été indiqués précédemment par G.-C. Rota. Il ne s'agit d'aucune manière d'importer les méthodes des mathématiques, au contraire il s'agit d'articuler une convergence d'intentions qui se fonde sur quelques thèses :

1. La philosophie dans l'un de ses moments capitaux est, et dans sa compréhension la plus partagée, la tentative d'enquêter les fondements de la connaissance rationnelle. Cela pose immédiatement le problème d'indiquer quels sont les critères de la rationalité et de la connaissance et, par la suite, de saisir d'où ces critères sont tirés ou abstraits, etc.
2. Les mathématiques sont, à certains égards, l'exploration de la rationalité conduite à partir d'un point de vue purement idéal. La connaissance donnée par les mathématiques, malgré le doute restant sur ce qu'elle concerne strictement, est pourvue d'une rigueur, d'une certitude intrinsèque – garantie par l'univocité de la langue et par l'indication des conditions de départ – qui ne sont partagées par aucune autre discipline parmi celles qu'on connaît jusqu'à présent.
3. Il s'ensuit, et celle-là est la possibilité que nous entendons explorer, que certaines théories de la connaissance de source philosophique pourraient être « testées » par l'exploration de la rationalité – ou d'une de ses interprétations – typique de l'activité créative du mathématicien. En ce sens les mathématiques seraient une sorte de garde-fou qui sauvegarderait le philosophe du risque de se pencher trop sur l'abîme des « théories évidentes », celles qui semblent « aller de soi » et dont la simple remise en doute paraîtrait une perte de temps.

Il est évident que par là nous n'aurions qu'une contribution « protectrice » de la part des mathématiques. Un pas de plus, strictement philosophique,

3. Il y aurait beaucoup à discuter sur cela. En effet une affirmation de ce type semble impliquer la nécessité qu'à la science soit relié aussi le progrès technologique.

serait d'ailleurs déjà dans la constatation que si la contribution mathématique permettait de douter fortement d'une thèse philosophique, on pourrait penser que déjà la « technique de mise en doute » pourrait suggérer une nouvelle méthode ou, au moins, une stratégie philosophiquement significative pour enquêter une suite de problèmes. Cela n'empêche pas que la collaboration, la « communauté d'intentions » entre les mathématiques et la philosophie puissent créer des nouvelles *variations sur le thème* de la tentative de comprendre l'effort de connaissance. A contrecœur, nous sommes obligés de laisser ces évolutions possibles à la suite de ce travail, pour le moment limitons-nous à cette question première : comment la philosophie peut utiliser les mathématiques ?

## 1. La situation dramatique

Généralement, dès qu'on avance des thèses sur ce qu'est la connaissance, on tend à distinguer plusieurs articulations possibles de ce phénomène. On peut laisser immédiatement de côté ce qui est considéré comme le moment le plus faible : les sens ou les perceptions nous donnent des connaissances fort douteuses. Cela va de pair avec une forme de partialité et d'insécurité qui ne nous permettent pas de les prendre comme des guides sûrs. Tout ce qui concerne une forme empiriste de la connaissance – par ce terme nous entendons, de manière un peu grossière, toute forme de pensée s'appuyant tôt ou tard sur les sens pour justifier la connaissance – tombe sous le poids d'une considération capitale : une forme de petitesse conceptuelle due au fait que les sens sont douteux *en principe*. Nous nous sommes trompés une fois, fût-ce une seule fois, et il s'ensuit que nous n'avons aucune certitude que nous ne nous tromperons encore.

Cela nous conduit à réfléchir sur les caractères que nous souhaitons pour une connaissance véritable et indubitable. En principe il y a une seule chose que la tradition nous porte à considérer comme sûre : ce qui est obtenu dans les mathématiques et qui constitue la dernière ligne d'une démonstration. Les « longues chaînes de déductions » se caractérisent comme des îlots, disséminés par-ci par-là, où le soleil brille toujours dans la mer souvent en tempête du doute. Toutefois, quoi qu'on en dise, les « longues chaînes de déductions » parlent à la tête et peut-être même pas complètement à celle-ci [4]. Qu'on l'énonce ou non, il y a un autre caractère qu'on voudrait appartenir à toute connaissance certaine : que, de quelque manière, elle soit donnée d'un « seul coup » dans une forme de prégnance intuitive, qui s'impose avec la force d'une *évidence*. Au fond, une « longue chaîne de déductions » demeure stérile, à un certain niveau de pensée, si elle est dépourvue d'intuitivité et d'évi-

4. Nous n'entendons pas dire que la connaissance doive également parler aux « tripes ». Cependant les « longues chaînes de déductions », et cela est souligné par les mathématiciens eux-mêmes, laissent souvent un peu froids.

dence qui semblent devoir couronner, comme moment final, le chemin de la connaissance. L'idée de base est que, si on arrivait à garder ensemble, dans un seul vécu de conscience, le chemin complet qui nous conduit à une démonstration ou à un résultat, nous aurions en quelque sorte comblé l'aspiration principale toujours présente dès qu'on tente de conquérir une connaissance : une vérité s'imposant en vertu de sa complétude et de son autosuffisance.

Les problèmes sont clairement situés dans le fait qu'il semble que les deux chemins – celui des « longues chaînes de déductions » et celui de l'intuition – soient essentiellement différents. Mis à part quelques résultats particulièrement bienveillants – c'est un hasard, mais souvent les résultats bienveillants sont les plus productifs aussi – on est toujours sur une sorte de créneau : au sommet il y a la vérité et des deux côtés, désespérément attirés par elle, il y a la chaîne déductive et l'effort d'obtenir d'un « seul coup » la plénitude de l'*évidence intuitive*. L'activité philosophique, surtout au vingtième siècle, a analysé en profondeur ces questions avec des résultats très différents. Mais notre problème ne réside pas dans l'acte de donner une clé de lecture qui soit préférable par rapport à une autre ; notre but est de voir pourquoi et comment le philosophe peut utiliser les mathématiques pour éliminer quelques problèmes ou pour apprendre à mieux les poser.

## 2. La compréhension naïve de l'évidence (I). Le raisonnement de Brouwer

Dans chaque milieu, en ce sens les mathématiques n'échappent pas à la règle, nous avons des convictions sur ce qui est acceptable et sur ce qui ne l'est pas. Nous sommes souvent amenés à définir comme *évidentes* ces « valeurs indiscutables ». Un premier problème que nous ne traiterons que très peu concerne l'identification de la source de cette « prétention à l'évidence ». Nous le traiterons en survol parce que, pour l'instant, il n'est pas important de le traiter en profondeur : qu'il s'agisse d'une *question historique*, d'une *mode* ou d'un véritable *a priori* peut être laissé en marge de ce travail. En fait, pour y répondre, nous serions obligés de parcourir un long chemin où les possibilités des mathématiques devraient être sondées attentivement. Il est néanmoins vrai que la philosophie, pour s'installer de manière accomplie, devrait y répondre parce que l'élimination des préjugés devrait en définir la phase préparatoire, mais le pari qu'on a décidé de jouer est différent : nous pensons aussi que dans cette élimination de préjugés les mathématiques peuvent aider la philosophie. Evitons toutefois l'erreur fondamentale : nous n'entendons aucunement soutenir que les mathématiques soient dépourvues de préjugés, ce qui nous intéresse dans ces disciplines est le fait qu'elles ont une habileté particulière de « courir sur le fil » d'un concept, de *le tendre*, de *l'étirer* jusqu'au point de rupture.

Demandons un premier acte de foi au lecteur, mais, d'autre part, comme nous le savons et comme toujours, un exemple vaut mieux que mille mots et nous pouvons en venir à l'analyse de notre première situation dramatique.

Selon cette ligne directrice visant à la « tension de concepts », les mathématiques nous montrent, surtout quand nous nous approchons de l'infini – en admettant que le verbe « s'approcher » ait, pour le moins, une signification allégorique – ces « valeurs indiscutables » deviennent beaucoup plus volatiles que ce à quoi il semblait légitime de s'attendre.

Considérons le nombre réel $\pi$. En 1761 Lambert en a démontré le caractère irrationnel[5]. Puisque $\pi$ est irrationnel, il n'y a aucune périodicité dans son développement décimal ($\pi$=3,1415926...). Cela veut dire qu'il n'y a pas de groupes de chiffres qui se répètent périodiquement à la droite de la virgule. Signalons que cela est le contenu d'un théorème précis, mais le point crucial est que nous ne disposons aucunement d'un algorithme capable de nous donner toutes les valeurs du développement de $\pi$ « en acte ». D'autre part, et cela est bien connu, nous disposons de plusieurs algorithmes capables de nous faire progresser dans le développement décimal de $\pi$ pour autant que nous le voulons. Plusieurs, parmi eux, sont reliés à la possibilité de détermination par le biais d'une série opportunément choisie. Historiquement, entre les plus connues, il y a la série de Leibniz pour laquelle :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1},$$

par la suite, on arrive à l'identité récente de Bailey, Borwein et Plouffe du 1996 donnée par :

$$\pi = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^i \left\{ \frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right\}$$

qui possède, sans rentrer dans des détails plus compliqués, des propriétés très utiles pour calculer le développement décimal de $\pi$. Toutefois, même si nous disposons de plusieurs algorithmes pour déterminer les chiffres de $\pi$, cela n'est possible que pas à pas. C'est-à-dire que nous n'avons jamais « tout » $\pi$. Par exemple, même si nous disposons de milliards de milliers de chiffres de $\pi$, nous ne savons pas (encore) si dans le développement apparaîtra tôt ou tard une suite de chiffres consécutifs tous affichant la valeur 0 et cela est déjà assez étrange : nous avons une suite de manières pour construire $\pi$, mais nous ne savons rien de comment ce développement évoluera, nous ne savons rien de ce qui se passera au-delà de ce qu'on calcule effectivement. Mais on peut faire

5. J.H. Lambert, « Mémoires sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques [1768] ». On peut le repérer in L. Berggren, J.M. Borwein, P. Borwein, *Pi. A Source Book*, Springer Verlag, New York, 2004[3] ; p. 129 – 140.